

METODOLOGÍA PARA CALCULAR LA RESPUESTA DE ESTRUCTURAS CON AMORTIGUADORES VISCOSOS

José R. Arroyo¹

Resumen: La cantidad de amortiguamiento en los sistemas estructurales se puede aumentar debido a la adición de amortiguadores lineales viscosos, produciendo un sistema con amortiguamiento no clásico. Es decir, debido a los amortiguadores viscosos añadidos se produce una matriz global de amortiguamiento llena. Esta condición no permite la aplicación de la común y bien conocida técnica de análisis modal que se basa en el uso de los modos de vibración para desacoplar las ecuaciones de movimiento y así simplificar el cálculo de la respuesta de la estructura, (Kusainov y Clough, 1988.), (Veletsos y Ventura, 1986), (Singh y Ghafory-Ashtiany, 1986). En este artículo se presenta un método para obtener la respuesta de una estructura con amortiguadores viscosos utilizando la transformación canónica de las ecuaciones de estado. Las ecuaciones de estado son transformadas en ecuaciones que pueden ser resueltas en el dominio de los números reales. Se presenta un ejemplo y los resultados son comparados contra los resultados obtenidos con las ecuaciones de estado resueltas en el dominio de los números complejos.

Palabras Claves: amortiguadores viscosos, amortiguamiento adicional, autovalores y modos complejos, ecuaciones de estado, sistemas de protección pasivos.

METHODOLOGY TO CALCULATE THE RESPONSE OF STRUCTURES WITH VISCOUS DAMPERS

Abstract: The amount of damping in structural systems can increase due to the addition of linear viscous dampers, a condition that creates a non-classical damped system. That is, due to the added viscous dampers a full global damping matrix is produced. This condition does not allow the application of the well known modal analysis technique, which is based on the use of the vibrational modes to uncouple the equations of motion to simplify the calculation of the response of the structure, (Kusainov, and Clough, 1988.), (Veletsos, and Ventura, 1986), (Singh, and Ghafory-Ashtiany, 1986). This paper presents a methodology to obtain the response of a structure with added viscous dampers using the canonical transformation of the state equations. The state equations are transformed into equations that can be solved in the real numbers domain. An example is presented and the results are compared against the results obtained with the state equations solved in the complex numbers domain.

Keywords: additional damping, complex eigenvalues and modes, passive protective systems, state equations, viscous dampers.

INTRODUCCIÓN

Uno de los mecanismos más eficientes para añadir capacidad de disipación de energía a una estructura es mediante el uso de amortiguadores viscosos. Como se muestra en la Figura 1, este mecanismo disipa energía transfiriendo un fluido a través de un orificio, produciendo una presión de amortiguamiento. Por muchos años, los amortiguadores viscosos han sido utilizados en muchas aplicaciones, entre los que se encuentra el control de vibraciones en sistemas aeroespaciales y de defensa. Este mecanismo ha sido muy bien evaluado por muchas décadas. Uno de los usos que ha sido bien documentado fue hecho por instituciones militares para examinar su uso en cañones de alto calibre.

Básicamente un amortiguador viscoso es comparable a los amortiguadores utilizados en los autos con la diferencia que los utilizados en estructuras operan en un rango de fuerzas más alto. Además, los amortiguadores utilizados en estructuras son considerablemente mayores que los usados en los autos y también son construidos en acero inoxidable y otros materiales extremadamente duraderos los cuales tienen una duración de por lo menos 40 años. El fluido de estos

¹ Departamento de Ingeniería General, Universidad de Puerto Rico, Recinto Univ. de Mayagüez P.R. 00681. jrarroyo@uprm.edu.

amortiguadores tiene las siguientes propiedades generales: es inerte, no inflamable, no tóxico, y estable por largos periodos de tiempo.

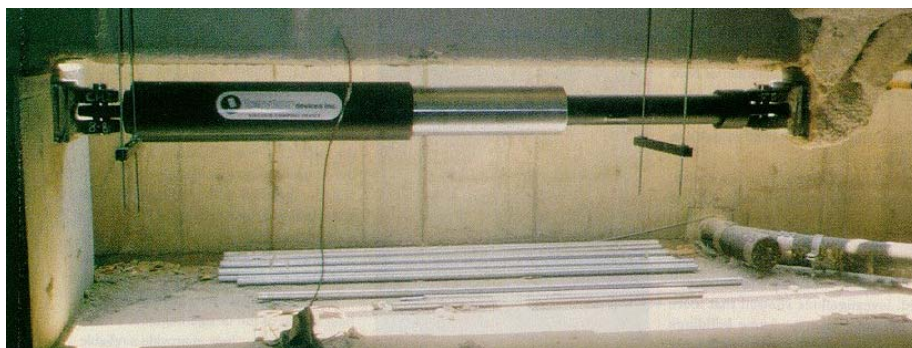


Figura 1: Ejemplo de un amortiguador viscoso.

Los amortiguadores viscosos han sido utilizados con éxito en estructuras civiles, especialmente en áreas geográficas de alta sismicidad. La aplicación principal de estos dispositivos ha sido en edificios multipisos y en la rehabilitación de estructuras históricas (Miyamoto, 2004). También se han utilizado para renovar estructuras existentes de forma tal que éstas cumplan con los requerimientos modernos que exigen los códigos de diseño estructural. De hecho, la adición de amortiguadores viscosos a una estructura puede elevar el amortiguamiento de la estructura a un 30 % del amortiguamiento crítico o más. Por consiguiente, esta adición puede reducir las aceleraciones y desplazamientos laterales por un 50% respecto a la estructura sin amortiguadores (Constantinou y Symans, 1992). Una cualidad que poseen los amortiguadores viscosos es su versatilidad. Por ejemplo pueden ser incorporados en una estructura sin comprometer su fachada o afectar arquitectónicamente al edificio. Es por esta razón que los amortiguadores viscosos son especialmente útiles para la rehabilitación de edificios históricos. La Figura 2 presenta un esquema de una manera de colocar los amortiguadores viscosos y la Figura 3 presenta un edificio en construcción al cual se le han instalado estos dispositivos (Constantinou y Taylor, 2004; Haskell y Lee, 2004).



Figura 2: Pórtico con amortiguadores viscosos en diagonal.



Figura 3: Edificio en construcción con amortiguadores.

En el análisis dinámico de estructuras es muy común suponer que el amortiguamiento es del tipo clásico. Esta suposición permite desacoplar las ecuaciones de movimiento mediante el uso de los autovectores no amortiguados del sistema. Sin embargo, las estructuras con amortiguadores viscosos producen una matriz global de amortiguamiento llena. Entonces, la matriz de amortiguamiento no puede ser diagonalizada por los autovectores del sistema no amortiguado.

Aún así se pueden desacoplar las ecuaciones de movimiento de un sistema estructural con amortiguamiento no clásico usando los autovectores del sistema amortiguado. Sin embargo, para tales estructuras los autovectores amortiguados son valores complejos. Este procedimiento desacopla las ecuaciones de movimiento de un sistema con amortiguamiento no clásico de “ n ” grados de libertad a un sistema de “ $2n$ ” ecuaciones de primer orden que tienen solución en el dominio de los números complejos. Este método se conoce como el método las Ecuaciones de Estado.

En este artículo se presenta un método alternativo para la descomposición modal que emplea una transformación canónica de las Ecuaciones de Estado. Las ecuaciones desacopladas resultantes envuelven solo números reales, evitando así que los cálculos se lleven a cabo en el dominio de los números complejos, como sería mediante la solución directa de las ecuaciones de estado. Se resuelve un ejemplo usando el método de la transformación canónica y los resultados se comparan contra los resultados obtenidos usando el método de las Ecuaciones de Estado en el dominio de los números complejos. Ambos métodos son considerados como “soluciones exactas”. La diferencia es que uno está definido en el dominio de los números complejos y el otro en el dominio de los números reales, partiendo ambos de las Ecuaciones de Estado (Arroyo, 2003; Warburton y Soni, 1977).

LA TRANSFORMACIÓN CANÓNICA PARA SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS

Comencemos con las ecuaciones de estado, las cuales se obtienen mediante una transformación de las ecuaciones de movimiento de un sistema estructural. Las ecuaciones de estado son

$$\dot{\tilde{Y}} = [A] \tilde{Y} + W \ddot{x}_g \quad (1)$$

donde $\tilde{Y} = \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \tilde{x}(t) \end{Bmatrix}$ es el vector de estado de dimensión “ $2n$ ”, en el cual los primeros “ n ” elementos corresponden al vector de velocidades relativas y los siguientes “ n ” elementos corresponden al vector de desplazamientos relativos de la estructura. La matriz $[A]$ es la transformación de las matrices $[M]$, $[C]$, $[K]$ y $[I]$ a la forma $[A]$ con W

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} ; \quad W = \begin{Bmatrix} -r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La matriz $[A]$ está definida en términos de las matrices de masa $[M]$, amortiguamiento $[C]$, rigidez $[K]$ de la estructura, por una matriz identidad $[I]$, y por una matriz de ceros $[0]$. Todas estas matrices son de dimensión “ $n \times n$ ”. El vector r es el vector unitario de coeficientes de influencia.

La solución del problema de autovectores asociados a la matriz $[A]$ produce “ $2n$ ” autovalores λ_j y sus correspondientes “ $2n$ ” autovectores ϕ_j . Estas propiedades modales son representadas por “ n ” pares de números complejos conjugados. Las frecuencias naturales y las razones de amortiguamiento pueden ser relacionadas a la parte real e imaginaria de los autovalores como sigue. Si los autovalores se expresan en forma cartesiana como

$$\lambda_j^c = \alpha_j + \beta_j i \quad (2)$$

Las cantidades α_j y β_j pueden ser relacionadas a las frecuencias y amortiguamiento como

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} = -\xi_j \omega_j \pm i \omega_{Dj} \quad (3)$$

donde

$$\omega_j = |\lambda_j| \quad ; \quad \xi_j = \frac{-\text{Re}(\lambda_j)}{\omega_j} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 2n$$

Finalmente, los autovectores de la matriz $[A]$ son los siguientes

$$\phi_j = a_j \pm i b_j \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (4)$$

en la cual a_j y b_j son vectores reales de dimensión $2n$. La matriz $[T]$ de dimensiones $(2n \times 2n)$ construida de la siguiente forma

$$[T] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_n & b_n \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \dots & \sim & \sim \end{bmatrix} \quad (5)$$

puede transformar la matriz $[A]$ en su forma canónica $[\Lambda]$ como

$$[\Lambda] = [T]^{-1} [A] [T] \quad (6)$$

en donde $[T]^{-1}$ es la inversa de la matriz $[T]$ y

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} [\Lambda_1] & & 0 \\ & [\Lambda_2] & \\ 0 & & [\Lambda_n] \end{bmatrix} \quad ; \quad [\Lambda_j] = \begin{bmatrix} -\xi_j \omega_j & \omega_{Dj} \\ \omega_{Dj} & -\xi_j \omega_j \end{bmatrix} \quad (7)$$

Introduciendo la siguiente transformación para el vector de estado

$$\tilde{Y} = [T] \tilde{V} \quad (8)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

$$\dot{\tilde{V}} = [\Lambda] \tilde{V} + \tilde{F} \ddot{x}_g \quad (9)$$

donde

$$\tilde{F} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} -r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

La ecuación (9) consiste de “ n ” pares de ecuaciones desacopladas. Cada par de ecuaciones representa un modo de vibración y está desacoplado de los otros pares. Sin embargo, las dos ecuaciones en cada par están acopladas entre sí. La transformación dada en la ecuación (8) es conocida como transformación canónica. Todos los parámetros en la ecuación (9) son reales y el j -ésimo par de ecuaciones acopladas es

$$\begin{aligned} \dot{v}_{2j-1} &= -\xi_j \omega_j v_{2j-1} + \omega_{Dj} v_{2j} + F_{2j-1} \ddot{x}_g \\ \dot{v}_{2j} &= -\omega_{Dj} v_{2j-1} - \xi_j \omega_j v_{2j} + F_{2j} \ddot{x}_g \end{aligned} \quad (11)$$

donde $j = 1, 2, \dots, n$. La solución de las ecuaciones (11) junto a la transformación de la ecuación (8), producen el vector de estado de la respuesta $\tilde{Y}(t)$. La ventaja de la formulación anteriormente presentada es que los cálculos se realizan en el campo de los números reales. La ecuación (11) puede ser resuelta usando el enfoque de la función a impulso unitario o el enfoque de la función respuesta en frecuencia.

FUNCIÓN RESPUESTA A IMPULSO PARA SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS

Se puede determinar la función respuesta a impulso unitario para sistemas subamortiguados usando el método canónico aplicando la transformada de Laplace $L[\dots]$ a cada término en las ecuaciones (11). Tomando como excitación $\ddot{x}_g = \delta(t)$ donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac (impulso unitario), y transformando cada función del tiempo, o sea,

$$V_{2j-1}(s) = L[v_{2j-1}(t)]; \quad V_{2j}(s) = L[v_{2j}(t)]; \quad L[\delta(t)] = e^{st_0} \quad (12)$$

con $t_0 = 0$, $L[\delta(t)] = 1$, cada expresión es transformada a la siguiente forma

$$sV_{2j-1}(s) - v_{2j-1}(0) + \xi_j \omega_j V_{2j-1}(s) - \omega_{Dj} V_{2j}(s) = F_{2j-1} \quad (13)$$

$$sV_{2j}(s) - v_{2j}(0) + \omega_{Dj} V_{2j-1}(s) + \xi_j \omega_j V_{2j}(s) = F_{2j} \quad (14)$$

donde $j = 1, 2, \dots, n$. Resolviendo las ecuaciones (13) y (14) por las desconocidas $V_{2j-1}(s)$ y $V_{2j}(s)$, y suponiendo las condiciones iniciales igual a cero, se obtiene

$$V_{2j-1}(s) = \frac{sF_{2j-1} + \xi_j \omega_j F_{2j-1} + \omega_{Dj} F_{2j}}{\omega_{Dj}^2 + s^2 + 2s\xi_j \omega_j + \xi_j^2 \omega_j^2} \quad (15)$$

$$V_{2j}(s) = \frac{sF_{2j} - \omega_{Dj} F_{2j-1} + \xi_j \omega_j F_{2j}}{\omega_{Dj}^2 + s^2 + 2s\xi_j \omega_j + \xi_j^2 \omega_j^2} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a las ecuaciones (15) y (16), resultan las siguientes expresiones

$$v_{2j-1}(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} \cos \omega_{Dj} t F_{2j-1} + e^{-\xi_j \omega_j t} \sin \omega_{Dj} t F_{2j} \quad (17)$$

$$v_{2j}(t) = -e^{-\xi_j \omega_j t} \sin \omega_{Dj} t F_{2j-1} + e^{-\xi_j \omega_j t} \cos \omega_{Dj} t F_{2j} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

Las ecuaciones (17) y (18) representan la función de respuesta a impulso de cada modo de un sistema subamortiguado. Las ecuaciones (17) y (18) pueden representarse como

$$h_{\sim j}(t) = \begin{cases} e^{-\xi_j \omega_j t} \cos \omega_{Dj} t F_{2j-1} + e^{-\xi_j \omega_j t} \sin \omega_{Dj} t F_{2j} \\ -e^{-\xi_j \omega_j t} \sin \omega_{Dj} t F_{2j-1} + e^{-\xi_j \omega_j t} \cos \omega_{Dj} t F_{2j} \end{cases} \quad (19)$$

Finalmente, el vector de respuesta, $v_{\sim j}(t)$, correspondiente al j-ésimo modo al tiempo t es

$$v_{\sim j}(t) = \int_{\sim j} h_{\sim j}(t - \tau) \ddot{x}_g(\tau) d\tau \quad (20)$$

La ecuación (20) puede ser integrada numéricamente y el vector de estado $Y_{\sim j}(t)$ se puede obtener a través de la transformación de la Ecuación (8).

TRANSFORMACIÓN CANÓNICA PARA SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS

Para sistemas sobreamortiguados la matriz $[A]$ produce unos autovalores y autovectores como los siguientes

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j \pm \omega_{Dj} \quad ; \quad \phi_{\sim j} = a_{\sim j} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (21)$$

donde $a_{\sim j}$ es un vector real de dimension $2n$. La matriz real $[T]$ de dimensión $(2n \times 2n)$ construida de la siguiente forma

$$[T] = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \tilde{a}_3 & \tilde{a}_4 & \dots & \tilde{a}_j & \tilde{a}_{j+1} & \dots & \tilde{a}_{2n-1} & \tilde{a}_{2n} \end{bmatrix} \quad (22)$$

transformará la matriz $[A]$ en su forma canónica $[\Lambda]$ como en la ecuación (4), donde

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{2n} \end{bmatrix} \quad (23)$$

y λ_j son los autovalores. Siguiendo el mismo procedimiento como en el caso de sistemas subamortiguados, la j -ésima ecuación en la expresión (9), para sistemas sobreamortiguados, está dada por

$$\dot{v}_j = \lambda_j v_j + F_j \ddot{x}_g \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (24)$$

La solución de la ecuación (24) junto con la transformación de la ecuación (8) produce el vector de estado de respuesta $\tilde{Y}(t)$ del sistema estructural sobreamortiguado. La ventaja de usar esta transformación es que los cálculos se efectúan en el dominio de los números reales. Finalmente, la ecuación (24) puede ser resuelta fácilmente como en el caso de sistemas subamortiguados, como se explica a continuación.

FUNCIÓN RESPUESTA A IMPULSO PARA SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS

El vector respuesta a impulso $h_{v_j}(t)$ para el modo j , debido a una aceleración del suelo de la forma $\ddot{x}_g(t) = \delta(t)$, donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac se puede obtener fácilmente. La función respuesta a impulso del modo j está dada por

$$h_{v_j}(t) = F_j e^{\lambda_j t} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, 2n \quad (25)$$

y la función de respuesta, $v_j(t)$, correspondiente al modo j al tiempo t es $v_j(t) = \int_0^t h_{v_j}(t-\tau) \ddot{x}_g(\tau) d\tau$. Entonces, el vector de estado $\tilde{Y}(t)$ se puede calcular en forma similar al caso de sistemas subamortiguados.

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

EJEMPLO NUMÉRICO

En esta sección se presenta la respuesta dinámica de un edificio con amortiguamiento no clásico sometido a una excitación sísmica en la base. La respuesta se calcula utilizando la transformación canónica de las ecuaciones de estado y se compara con la solución de las ecuaciones de estado resueltas en el dominio de los números complejos. El caso de estudio consiste en un edificio de corte de tres pisos con amortiguadores viscosos en todos los pisos. La respuesta fue calculada utilizando como excitación el historial de aceleraciones típico del terremoto de El Centro que se muestra en la Figura 4. La Figura 5 muestra un esquema general del edificio de corte estudiado y sus características y propiedades se presentan en la Tabla 1. La razón de amortiguamiento asociada a cada modo se presenta en la Tabla 2. Estos fueron calculados basados en un coeficiente (C) para los amortiguadores igual a 250,000 lbs*s/pulgada en cada piso. La Figura 6 muestra el historial en el tiempo del desplazamiento relativo del tercer piso debido a la excitación previamente descrita. El resultado obtenido con la solución de las Ecuaciones de Estado se presenta en la Figura 7. Éste es el mismo resultado que el obtenido usando la transformación canónica de los Ecuaciones de Estado.

CONCLUSIONES

La inclusión de amortiguadores viscosos en las estructuras produce una matriz de amortiguamiento global llena, resultando en un sistema con amortiguamiento no clásico. Esto produce que las ecuaciones de movimiento no puedan ser desacopladas usando los modos de vibración del sistema no amortiguado y por consiguiente no puede utilizarse el análisis modal convencional. Una metodología que puede utilizarse para obtener la respuesta de este tipo de sistemas es mediante la solución de las Ecuaciones de Estado. Sin embargo, este enfoque está definido en el dominio de los números complejos.

Con la transformación canónica de las Ecuaciones de Estado, los cálculos se pueden hacer en el dominio de los números reales, comenzando con los autovectores complejos obtenidos de las ecuaciones de estado. Se obtuvieron las

expresiones requeridas para calcular la respuesta a cargas arbitrarias aplicando la transformación canónica para sistemas subamortiguados y sobreamortiguados. El resultado obtenido con la transformación canónica fue comparado contra la solución obtenida de las ecuaciones de estado en el dominio de los números complejos produciendo los mismos resultados. Se demostró que la transformación canónica es un enfoque útil para calcular la respuesta de estructuras con amortiguamiento no proporcional, evitando el manejo de números complejos en la solución cuando se resuelven las ecuaciones de estado.

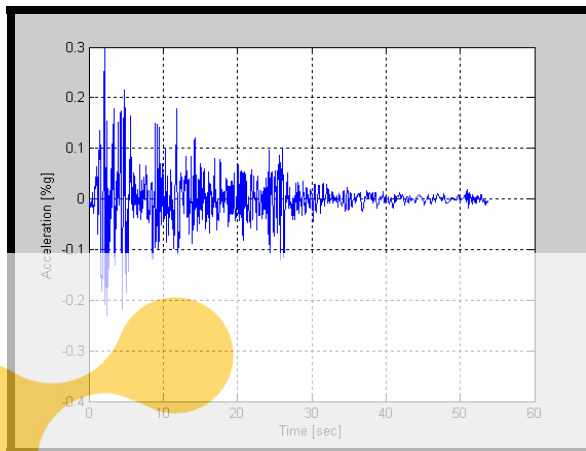


Figura 4: Historial de aceleraciones del registro de El Centro normalizado a 0.3g.

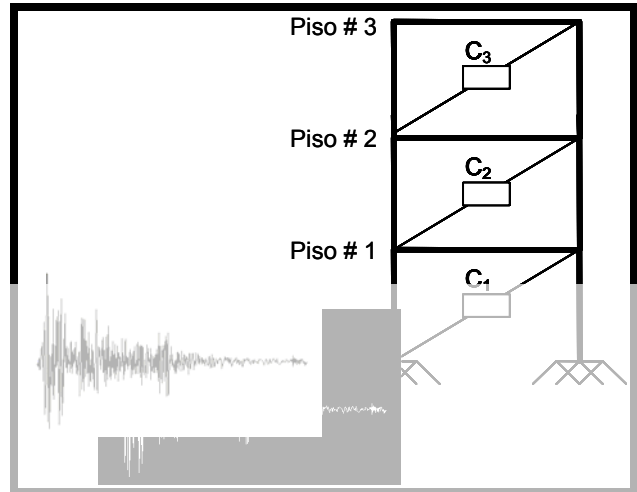


Figura 5: Modelo de un edificio de corte usado en el ejemplo.

Tabla 1: Propiedades del Edificio de corte de tres pisos.

Piso #	W (lb)	K (lb/pulgada)
1	5796000	4000000
2	3864000	3000000
3	1932000	2000000

Tabla 2: Propiedades dinámicas del edificio de corte.

Modo	Periodos (seg ⁻¹)	Razón de Amortiguamiento
1	0.668	0.5895
2	0.284	0.9202
3	0.232	1.6814

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark

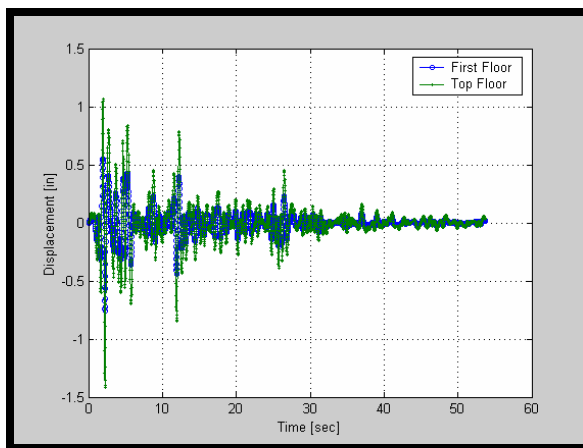


Figura 6: Desplazamiento relativo obtenido con el método de la Transformación Canónica.

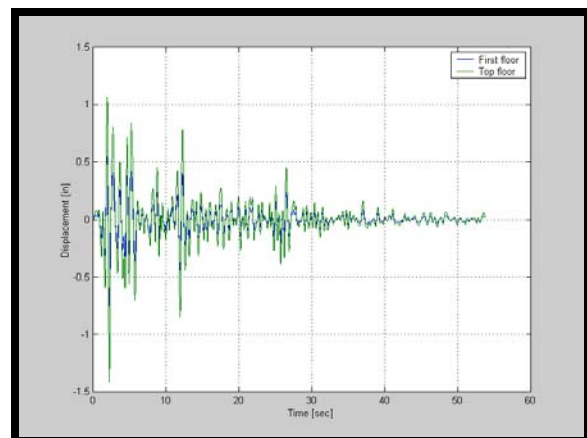


Figura 7: Desplazamiento relativo obtenido con el método de las Ecuaciones de Estado.

RECONOCIMIENTOS

Se desea reconocer el apoyo económico de la Agencia Federal para el Manejo de Emergencias (FEMA) bajo el “Hazard Mitigation Grant Program - FEMA-1247-DR-PR Proyecto PR-0060-C”, para realizar la investigación titulada “Improved Structural Analysis of Building with Added Dampers”. También la ayuda provista por la Universidad de Puerto Rico en Mayagüez fue muy importante para la realización de este proyecto de investigación.

REFERENCIAS

- Arroyo, J.R. (2003). “Improved structural analysis of buildings with added dampers”, *Technical Report for the Federal Emergency Management Agency*, University of Puerto Rico, Mayagüez, Puerto Rico.
- Constantinou, M.C. y Symans, M.D. (1992). “Experimental and Analytical Investigation of Seismic Response of structures with supplemental fluid viscous dampers”. Report NCEER-92-0032, *National Center for Earthquake Engineering Research*, State University of New York at Buffalo, Buffalo, New York.
- Constantinou, M. y Taylor, D. *Fluid Dampers for Applications of Seismic Energy Dissipation and Seismic Isolation*. En: <http://www.taylordevices.com/dampers.htm> (activa en el 2004).
- Haskell, G., y Lee, D. “Fluid Viscous Damping as an Alternative to Base Isolation”. Santa Monica, California. En: http://www.taylordevices.com/fvd_alt1.htm, (activa en el 2004).
- Kusainov A. A. y Clough R. W. (1988). “Alternatives to Standard Mode Superposition for Analysis of Non-Classically Damped Systems”. *Report No. UCB/EERC-88/09*, University of California at Berkeley, Berkeley, California.
- Miyamoto, H. K. “Seismic Rehabilitation of a Historic Non-Ductile Soft Story Concrete Structure Using Fluid Viscous Dampers”. En: <http://www.taylordevices.com/rahab.htm>, (activa en el 2004).
- Singh M., y Ghafory-Ashtiany, M. (1986). “Modal time history analysis of non-classically damped structures for seismic motions”. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 14, pp. 133-146.
- Veletsos A. S., y Ventura C.E. (1986). “Modal analysis of non-classically damped linear systems”. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 14, pp. 217-243.
- Warburton, G. B. y Soni, S. R. (1977). “Errors in Response Calculations for Non-Classically Damped Structures”. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5, pp. 365-376.
- Yang, J.N., Sarkani, S. y Long, F.X. (1987). “Modal analysis of nonclassically damped structural systems using canonical transformation”, *Technical Report NCEER-87-0019*, State University of Buffalo, Buffalo, New York.

Register for free at <https://www.scipedia.com> to download the version without the watermark